ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**VĂN THỊ THU HÀ**

# MỘT SỐ CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ PYTHAGORAS

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Thái Nguyên - 2017**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**VĂN THỊ THU HÀ**

# MỘT SỐ CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ PYTHAGORAS

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp**
**Mã số: 60 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
**PGS.TS. TẠ DUY PHƯỢNG**

**Thái Nguyên - 2017**

# Mục lục

# Mở đầu

Định lý Pythagoras và ứng dụng của nó rất quen thuộc trong chương trình toán phổ thông. Nhiều kiến thức toán học hiện đại (chuẩn, không gian định chuẩn, tính chất vuông góc,...) được phát triển từ định lý Pythagoras. Định lý Pythagoras là một trong những định lý toán học thể hiện qui luật cơ bản của thế giới tự nhiên, có nhiều chứng minh nhất và liên quan đến nhiều kiến thức toán khác.

Một số tài liệu Tiếng Việt đã giới thiệu về định lý Pythagoras. Thí dụ, trong [1] đã giới thiệu 15 cách chứng minh định lý Pytagoras bằng cách ghép hình. Tuy nhiên, còn rất nhiều chứng minh định lý Pythagoras và các vấn đề liên quan chưa được đề cập trong các tài liệu Tiếng Việt.

Theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có một luận văn Thạc sĩ nào trình bày về định lý Pythagoras. Cũng chưa có một cuốn sách Tiếng Việt nào viết chuyên sâu về định lý Pythagoras.

Luận văn *Một số chứng minh định lý Pythagoras* có mục đích trình bày hơn 60 (trong số khoảng 400) cách chứng minh khác nhau của định lý Pythagoras. Luận văn gồm Mở đầu, ba chương, kết luận và tài liệu tham khảo. Cụ thể các chương như sau:

- Chương 1. Các chứng minh hình học của định lý Pythagoras
- Chương 2. Các chứng minh đại số và lượng giác của định lý Pythagoras
- Chương 3. Chứng minh định lý Pythagoras nhờ các định lý hình học khác

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS. Tạ Duy Phượng (Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học & Công nghệ Việt Nam). Đặc biệt Thầy đã cung cấp nhiều tài liệu và biên tập kĩ luận văn. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy.

Tôi xin được cảm ơn Khoa Toán-Tin, Khoa Sau Đại học, Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và Trường Trung học cơ sở Lương Khánh Thiện, Kiến An, Hải Phòng và bạn bè, người thân, đồng nghiệp đã tạo điều kiện, động viên và cổ vũ tôi thực hiện kế hoạch học tập.

*Thái Nguyên, ngày 13 tháng 5 năm 2017*

Tác giả

**Văn Thị Thu Hà**

# Chương 1

# Các chứng minh hình học của định lý Pythagoras

## 1.1 Các chứng minh đầu tiên của định lý Pythagoras

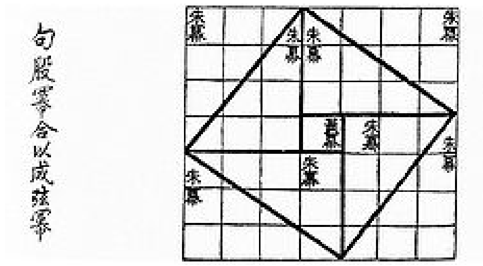
### 1.1.1 Người Ả rập và người Trung Quốc

Phát biểu của định lý Pythagoras được tìm thấy trong các bảng đất sét của người Babylon (1900-1600 trước Công nguyên), xem Hình 1.1.

Hình 1.1. Bảng đất sét của người Babylon

Euclid (300 năm trước Công nguyên) là người đầu tiên phát biểu và chứng minh định lý đảo của định lý Pythagoras trong cuốn sách *Cơ sở* của Ông.

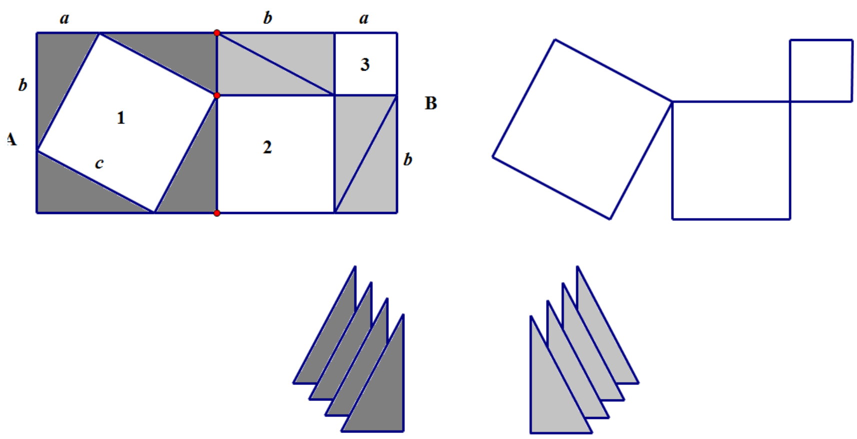
Người Ấn Độ (thế kỉ 8-thế kỉ 5 trước Công nguyên) và người Trung Quốc cũng đã biết đến định lý Pythagoras từ rất sớm. Cuốn sách *Chu bễ toán kinh* được coi là từ thời nhà Chu (1046-771 trước Công nguyên) đã nhắc tới tam giác $(3,4,5)$ và áp dụng *phép câu cổ* (câu, cổ: cạnh góc vuông) trong đo đạc. *Phép câu cổ* (định lý Pythagoras) được nghiên cứu sâu trong các tác phẩm tiếp theo như *Cửu chương* *toán thuật* (được coi là của Trần Sanh (khoảng năm 152 trước Công nguyên) và được Lưu Huy (thế kỉ III) và Tổ Xung Chi (thế kỉ V) bổ sung. Hình 1.2 là hình trong *Cửu chương toán thuật*.



Hình 1.2. Một hình ảnh trong sách *Cửu chương toán thuật*

### 1.1.2 Các chứng minh của Pythagoras

**Chứng minh 1** (Pythagoras, xem [6], trang 29-30)**.** Cách chứng minh này sử dụng sự phân chia khác nhau hai hình vuông giống nhau có diện tích bằng nhau.




Hình 1.3. Chứng minh của Pythagoras - Chứng minh 1

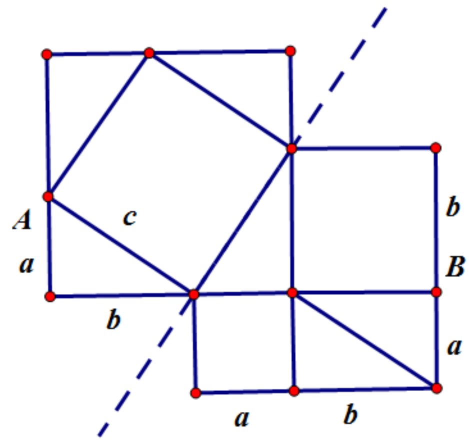
Hình vuông $(A)$ được chia thành hình vuông to $(1)$ và bốn hình tam giác nhỏ màu xám đậm bằng nhau (mỗi hình có diện tích $S = \dfrac{ab}{2}$).

Hình vuông $(B)$ được chia thành hai hình vuông $(2)$, $(3)$ và bốn hình tam giác nhỏ màu xám nhạt bằng nhau và bằng các hình tam giác màu xám đậm (cũng có diện tích $S = \dfrac{ab}{2}$).

Kí hiệu $[X]$ là diện tích hình $X$. Ta có

$$\begin{cases} [A] = [1] + 4S \\ [B] = [2] + [3] + 4S \end{cases} \Rightarrow [1] = [2] + [3] \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2.$$

**Chứng minh 2** (Pythagoras, xem [6], trang 29-30)**.** Hình $A$ được chia thành hình vuông cạnh $c$ và ba hình tam giác nhỏ bằng nhau có diện tích $S = \dfrac{ab}{2}$.




Hình 1.4. Chứng minh của Pythagoras - Chứng minh 2

Hình $B$ được chia thành hai hình vuông có cạnh lần lượt là $a$, $b$ và ba hình tam giác nhỏ có diện tích $S = \dfrac{ab}{2}$.

Từ đây ta có, diện tích hình vuông cạnh $c$ bằng tổng diện tích hai hình vuông cạnh $a$ và $b$ hay $c^2 = a^2 + b^2$.

### 1.1.3 Chứng minh định lý Pythagoras trong cuốn sách *Cơ sở* của Euclid

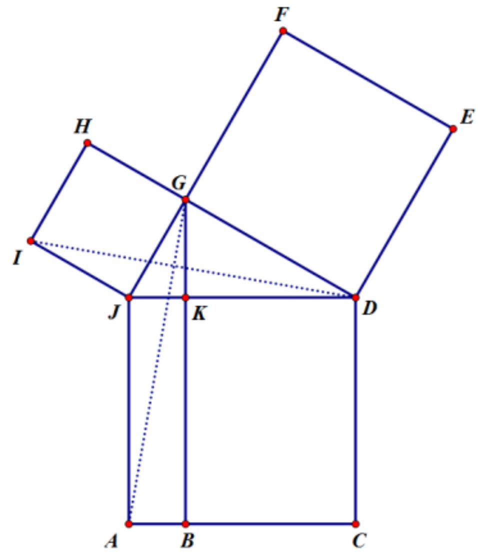
Euclid (330-275 trước Công nguyên) trong cuốn sách *Cơ sở* nổi tiếng đã trình bày nhiều cách chứng minh định lý Pythagoras và định lý Pythagoras đảo.

**Chứng minh 3** (Euclid, xem [5], trang 32-45, xem [6], trang 36-41)**.** Xét $\Delta DJI$ và $\Delta AJG$ có

$$IJ = JG, \quad \widehat{DJI} = \widehat{AJG}, \quad JD = JA$$

nên

$$\Delta DJI = \Delta AJG \text{ (c.g.c).} \tag{1.1}$$




Hình 1.5. Cối xay gió của Euclid

Ta có

$$S_{\Delta IJD} = \frac{IJ.d(D;IJ)}{2} = \frac{IJ.JG}{2} = \frac{S_{IJGH}}{2} \Rightarrow S_{IJGH} = 2S_{\Delta IJD}, \quad (1.2)$$

$$S_{\Delta GJA} = \frac{JA.d(G;JA)}{2} = \frac{JA.BA}{2} = \frac{S_{ABKJ}}{2} \Rightarrow S_{ABKJ} = 2S_{\Delta GJA}. \quad (1.3)$$

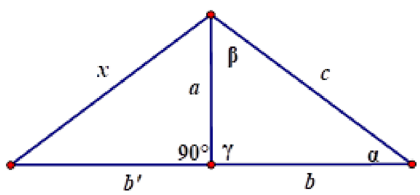
Từ (1.1), (1.2) và (1.3) suy ra $S_{HGJI} = S_{KBAJ}$.

Tương tự ta có $S_{GDEF} = S_{BCDK}$. Do đó

$$S_{HGJI} + S_{GDFE} = S_{KBAJ} + S_{BCDK} = S_{ACDJ}.$$

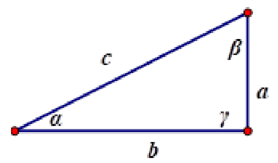
Suy ra $JG^2 + GD^2 = JD^2$, hay $a^2 + b^2 = c^2$.

**Chứng minh 4** (Euclid, xem [6], trang 42-44)**.** Giả sử một tam giác có độ dài ba cạnh thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$.




Hình 1.6. Chứng minh định lý Pythagoras đảo của Euclid

Ta tạo một đoạn thẳng vuông góc với cạnh $a$ và có độ dài $b' = b$. Dựng tam giác vuông với hai cạnh $a$ và $b'$. Khi đó cạnh huyền $x$ sẽ có độ dài $x^2 = a^2 + b^2 = c^2$. Do đó $x = c$. Như vậy tam giác mới tạo sẽ bằng tam giác ban đầu theo cạnh-cạnh-cạnh; có nghĩa là góc $\gamma$ của tam giác ban đầu có giá trị bằng góc $90^\circ$ của tam giác mới. Định lý Pythagoras ngược đã được chứng minh.




$$\alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Hình 1.7. Chứng minh định lý Pythagoras đảo của Euclid

Chứng minh định lý Pythagoras đảo trên đây là một cách chứng minh đặc biệt hiếm gặp: Thông thường với lối chứng minh đảo ta dễ rơi vào ngộ nhận nhưng ở cách chứng minh này, lời giải được đưa ra một cách tự nhiên và hợp lí, nhanh chóng đưa đến kết quả. Đồng thời, thay đổi cách nhìn của người đọc về lối chứng minh đảo: không hề khó mà lại rất thú vị khi chúng ta nhìn nhận đúng vấn đề cần chứng minh.

### 1.1.4 Ghép hình vuông của Lưu Huy và Archimedus

**Chứng minh 5** (Lưu Huy, khoảng năm 275 TCN)**.**
Chứng minh của Lưu Huy thuộc loại chứng minh bằng xếp hình. Hai hình vuông nhỏ có thể được chia ra để xếp vào hình vuông lớn hơn.

Vậy Lưu Huy đã nghĩ như thế nào để đưa đến ý tưởng xếp hình này? Tại sao ông lại sử dụng hai tam giác có góc tù với các cạnh không bằng nhau? Thêm nữa, tại sao Lưu Huy lại chia ba hình vuông thành 14 mảnh thay vì 20 mảnh? Câu trả lời có lẽ bắt nguồn từ Archimedes (287 - 212 trước Công nguyên), một trong ba nhà toán học vĩ đại nhất của Hy Lạp cổ đại.

Trò chơi Stomachion còn được biết đến với cái tên *hình vuông của Archimedes*. Trong trò chơi này, một lưới hình vuông $12 \times 12$ được cắt thành 14 mảnh đa giác